EXERCICES SUR LE BARYCENTRE

Exercice 1

ABCD est un quadrilatère et *G* est la barycentre de (*A*, 1)(*B*, 1)(*C*, 3)(*D*, 3).

Construire le point *G*. (Argumenter)

Exercice 2

ABC est un triangle.

1. *G* est le barycentre de (*A*, 1)(*B*, 2)(*C*, 3). Construire le point *G*. (Argumenter)
2. *G'* est le barycentre de (*A*, 1)(*B*, 3)(*C*, –3). Construire le point *G'*. (Argumenter)
3. Démontrer que (*AG'*) est parallèle à (*BC*).

Exercice 3

B est le milieu de [*AC*]. Démontrer que le barycentre de (*A*, 1)(*C*, 3) est confondu avec celui de (*B*, 2)(*C*, 2).

Exercice 4

Dans le triangle *ABC*, *E* est le milieu de [*AB*] et *G* est le barycentre de (*A*, –2)(*B*, –2)(*C*, 15).

Démontrer que *G*, *C* et *E* sont alignés.

Exercice 5

On considère un triangle *ABC* et l'on désigne par *G* le barycentre de (*A*, 1), (*B*, 4) et (*C*, –3).

1. Construire le barycentre *I* de (*B*, 4) et (*C*, –3).
2. Montrer que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GI} = \overrightarrow{0}$. En déduire la position de *G* sur (*AI*).

Exercice 6

ABC est un triangle. On note *G* le barycentre de (*A*, 2), (*B*, 1) et (*C*,1).

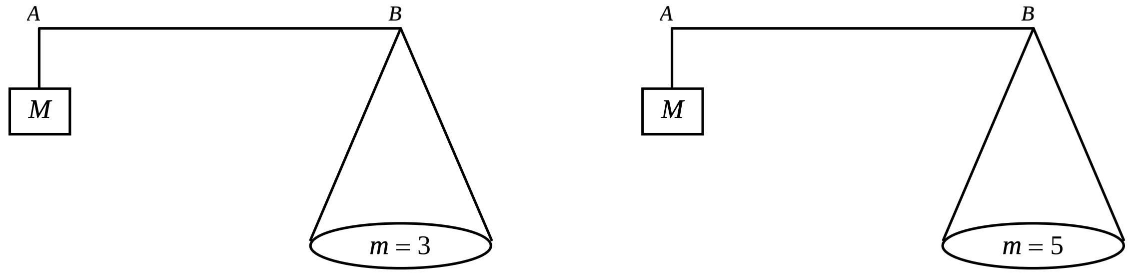
Le but de l'exercice est de déterminer la position précise du point *G*.

1. Soit *I* le milieu de [*BC*]. Montrer que $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GI}$.
2. En déduire que *G* est le barycentre de *A* et *I* munis de coefficients que l'on précisera.
3. Conclure.

Exercice 7

Une balance est constituée d'une masse *M* et d'un plateau fixé aux extrémités d'une tige. Pour peser une masse *m*, le vendeur place, à une position précise, un crochet sur la tige. Cette balance a l'avantage, pour le commerçant, de ne pas manipuler plusieurs masses.

1. Pour chacun des cas suivants, où faut-il fixer le crochet *G* sur le segment [*AB*] pour réaliser l'équilibre ?
   (*M* = 2kg)



(On pourra reproduire ces schémas à l'échelle de son choix)

2. Le point G est tel que $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$. Quelle est la masse m pesée ? (Donnée : $M = 2$kg)

Exercice 8

ABCD est un quadrilatère. On note G son isobarycentre. Le but de cet exercice est de préciser le position de G.

1. On note I le milieu de $[AC]$ et J le milieu de $[BD]$.

   Montrer que G est le barycentre de I et J munis de coefficients que l'on précisera.
2. Conclure et faire une figure.

Exercice 9

1. Placer dans un repère les points $A(1, 2)$, $B(-3, 4)$ et $C(-2, 5)$.

   Soit G le barycentre des points pondérés $(A, 3)$, $(B, 2)$ et $(C, -4)$.
2. Quelles sont les coordonnées de G ? Placer G.
3. La droite (BG) passe-t-elle par l'origine du repère ? (Justifier)

Exercice 10

Étant donné un triangle *ABC* et k un réel non nul, on définit les points D et E par les relations :

$$\overrightarrow{AD} = k\,\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{CE} = k\,\overrightarrow{CA}$$

1. Faire une figure illustrant ces données lorsque $k = \frac{1}{3}$, puis lorsque $k = -1$.
2. Démontrer que D est le barycentre de $(A, 1 - k)$ et (B, k).
3. Démontrer que E est le barycentre de $(C, 1 - k)$ et (A, k).
4. En déduire que pour tout point M du plan, on a :

   $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} + k\,\overrightarrow{CB} = 2\left(\overrightarrow{MB'} + k\,\overrightarrow{B'C'}\right)$ où B' et C' sont les milieux respectifs de $[AC]$ et $[AB]$.
5. Soit I le milieu de $[DE]$, déduire de la question précédente que I, B' et C' sont alignés.

Exercice 11

ABC est un triangle. Soit G le barycentre de $(A, 1)$, $(B, 3)$ et $(C, -3)$

Démontrer que les droites (AG) et (BC) sont parallèles.

Exercice 12

ABC est un triangle. On considère le barycentre A' de $(B, 2)$ et $(C, -3)$, le barycentre B' de $(A, 5)$ et $(C, -3)$ ainsi que le barycentre C' de $(A, 5)$ et $(B, 2)$.

Démontrer que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes.

Indication : on pourra considérer le barycentre G de $(A, 5)$, $(B, 2)$ et $(C, -3)$.

Exercice 13

ABC est un triangle de centre de gravité G. On note I, J, M, N, R et S les points définis par :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\ ;\ \overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\ ;\ \overrightarrow{BR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{BS} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$$

Démontrer que les droites (IS), (MR) et (NJ) concourent en G.

Exercice 14

Soit ABC un triangle équilatéral de côté 3 cm.

1. Placer, en justifiant, le barycentre Z de $(A, 1)$, $(B, 3)$ et $(C, -3)$.
2. Montrer que les droites (AZ) et (BC) sont parallèles.

Exercice 15

Soit ABC un triangle isocèle en A tel que $BC = 8$ cm et $BA = 5$ cm. Soit I le milieu de $[BC]$.

1. Placer le point F tel que $\overrightarrow{BF} = -\overrightarrow{BA}$ et montrer que F est le barycentre des points A et B pondérés par des réels que l'on déterminera.
2. P étant un point du plan, réduire chacune des sommes suivantes :

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{PB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{PC}$$

$$-\overrightarrow{PA} + 2\overrightarrow{PB}$$

$$2\overrightarrow{PB} - 2\overrightarrow{PA}$$

3. Déterminer et représenter l'ensemble des points M du plan vérifiant :

$$\left\| \frac{1}{2}\overrightarrow{MB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MC} \right\| = \left\| -\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} \right\|$$

4. Déterminer et représenter l'ensemble des points N du plan vérifiant :

$$\left\| \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} \right\| = \left\| 2\overrightarrow{NB} - 2\overrightarrow{NA} \right\|$$

Exercice 16

Soit ABC le triangle donné sur la feuille ci-jointe.

1. Placer, en justifiant, le barycentre U de $(A, 4)$ et $(C, 1)$, puis placer le barycentre E de $(A, 4)$ et $(B, 1)$.
2. Soit G le barycentre de $(A, 4)$, $(B, 1)$ et $(C, 1)$. Montrer que G est barycentre de $(E, 5)$ et $(C, 1)$.
3. Démontrer que les droites (EC), (AY) et (BU) sont concourantes.

Exercice 17

Dans un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, placer les points $A(2, 1)$, $B(-1, 5)$, $C(5, 7)$ et $G\left(1, \frac{5}{2}\right)$.

1. Déterminer les coordonnées de l'isobarycentre I des points B et C.
2. Déterminer les coordonnées du centre de gravité H du triangle ABC.
3. Existe-t-il un réel k tel que G soit barycentre de $(A, 1)$ et (B, k) ? Justifier.

Exercice 18

Soit ABC un triangle et G un point vérifiant : $\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB} - 3\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$.

Le point G est-il le barycentre des points pondérés $(A, 5)$, $(B, 1)$ et $(C, 3)$? (Justifier)

Exercice 19

Soient A et B deux points distincts et $G = \text{bar}\,(A, \alpha), (B, \beta)$ avec $\alpha + \beta \neq 0$.

Démontrer l'équivalence :

$$G \in [AB] \Leftrightarrow \alpha \text{ et } \beta \text{ sont de mêmes signes.}$$

Exercice 20

Soit $ABCD$ un carré et K le barycentre des points pondérés $(A, 2)$, $(B, -1)$, $(C, 2)$ et $(D, 1)$.

On note I le barycentre des points pondérés $(A, 2)$ et $(B, -1)$ et J celui de $(C, 2)$ et $(D, 1)$.

1. Placer I et J en justifiant.
2. Réduire l'écriture des vecteurs suivants : $2\overrightarrow{KA} - \overrightarrow{KB}$ et $2\overrightarrow{KC} + \overrightarrow{KD}$.

   En déduire que K est le barycentre de $(I, 1)$ et $(J, 3)$.
3. Placer K en justifiant.

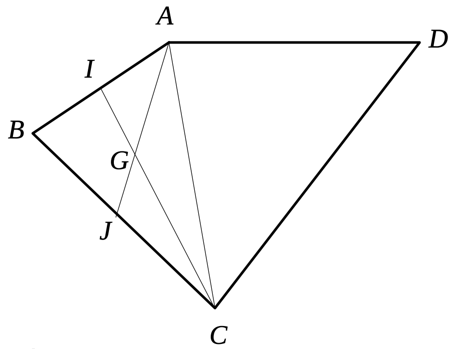
Exercice 21

On considère un segment $[AB]$ de médiatrice d.

Soient C et D points de d et G l'isobarycentre de A, B, C et D.

Démontrer que $G \in d$.

Exercice 22



$ABCD$ est un quadrilatère. G est le centre de gravité du triangle ABC.

I et J sont les milieux respectifs de $[AB]$ et $[BC]$.

L est le barycentre de $(A, 1)$ et $(D, 3)$ et K le barycentre de $(C, 1)$ et $(D, 3)$.

Le but de l'exercice est de démontrer que les droites (IK), (JL) et (DG) sont concourantes.

Pour cela, on utilisera le barycentre H de $(A, 1)$, $(B, 1)$, $(C, 1)$ et $(D, 3)$.

1. Placer, en justifiant, les points L et K.
2. Démontrer que H est le barycentre de G et D munis de coefficients que l'on précisera.
3. Démontrer que H est le barycentre de J et L munis de coefficients que l'on précisera.
4. Démontrer que H est le barycentre de I et K munis de coefficients que l'on précisera.
5. Conclure.

Exercice 23

ABCDE est une pyramide à base carrée *BCDE*.

Soit G l'isobarycentre de A, B, C, D et E

On note O le centre du carré *BCDE* (c'est-à-dire l'intersection des diagonales (CE) et (BD))

1. Démontrer que O est l'isobarycentre de *BCDE*.
2. Démontrer que G est le barycentre de $(O, 4)$ et $(A, 1)$.
3. Soit G_1 le centre de gravité du triangle *ABE* et I le milieu de $[CD]$. Démontrer que $G \in (G_1I)$.

(Pour cet exercice, une figure est recommandée)

Exercice 24

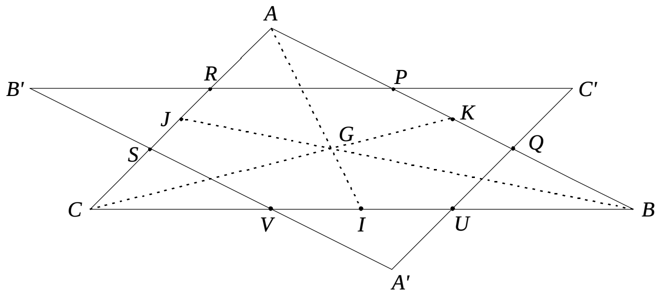
ABC est un triangle de centre de gravité G.

On note I, J et K les milieux respectifs de $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.

On définit les points P, Q, R, S, U et V par :

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AS} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{BU} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{BV} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$$

On note $A' = (QU) \cap (SV)$, $B' = (SV) \cap (RP)$ et $C' = (RP) \cap (QU)$



1. Démontrer que $AQA'S$ est un parallélogramme.
2. En déduire que $\overrightarrow{AA'} = 2\,\overrightarrow{AG}$, puis que G est le milieu de $[AA']$.
3. On démontre, de même, que G est le milieu de $[BB']$ et de $[CC']$. Démontrer que G est le centre de gravité du triangle $A'B'C'$.

Exercice 25

ABCD est un tétraèdre et G est le barycentre de $(A, 4)$, $(B, 1)$, $(C, 1)$ et $(D, 1)$.

On note H le centre de gravité du triangle *BCD* (c'est-à-dire H est l'isobarycentre de B, C et D)

1. Démontrer que G est le barycentre de $(H, 3)$ et $(A, 4)$.
2. Situer le point G sur la droite (AH).

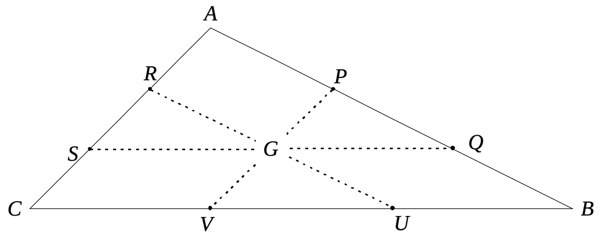
(Pour cet exercice, une figure est recommandée)

Exercice 26

ABC est un triangle de centre de gravité G.

On définit les points P, Q, R, S, U et V par :

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AS} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{BU} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{BV} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$$



1. Démontrer que P est le barycentre de $(A, 2)$ et $(B, 1)$ et que V est le barycentre $(C, 2)$ et $(B, 1)$.
2. En déduire que G est le milieu de $[PV]$.
3. On démontre, de même, que G est le milieu de $[RU]$ et de $[SQ]$ (inutile de refaire les calculs). Démontrer que $RPUV$ est un parallélogramme.

Exercice 27

$ABCD$ est un carré.

1. Quel est l'ensemble E des points M du plan tels que $\| 2\,\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \| = AB$?
2. Représenter cet ensemble E.

Exercice 28

ABC est un triangle. On définit les points I, J et K par :

$$\overrightarrow{BI} = k\,\overrightarrow{BC} \qquad \overrightarrow{CJ} = k\,\overrightarrow{CA} \qquad \overrightarrow{AK} = k\,\overrightarrow{AB} \qquad (k \in \mathbb{R})$$

On note G l'isobarycentre de A, B et C.

1. Faire une figure dans la cas $k = \dfrac{1}{3}$.
2. Démontrer que G est l'isobarycentre de I, J et K.

Exercice 29

ABC est un triangle équilatéral de côté 4 cm.

Déterminer l'ensemble Γ des points M du plan tels que : $\| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\,\overrightarrow{MC} \| = \| \overrightarrow{MB} + 3\,\overrightarrow{MC} \|$

Exercice 30

$[AB]$ est un segment de longueur 6 cm.

Déterminer l'ensemble Γ des points M du plan tels que : $MA = 2MB$.